Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(8, 2, 4)$, $C(-1, -2, -3)$ y $D(4, 1, -1)$.

- Explique por qué el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
- Encuentre el área del paralelogramo $ABCD$.
- Encuentre una ecuación del plano que contiene al paralelogramo $ABCD$.
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A perpendicular al plano que contiene $ABCD$.

2. Considere el plano de ecuación

$$3x + y + 2z = 6.$$

- Encuentre los puntos A , B y C de intersección de este plano con, respectivamente, los ejes x , y y z , y haga un dibujo del plano usando estos tres puntos.
- Calcule el área del triángulo ABC .

3. Encuentre una ecuación de la recta de intersección de los planos

$$2x - y - z = 5 \quad \text{y} \quad 4x + 3y - z = 5.$$

Grafique los dos planos y su intersección en una misma gráfica.

4. Encuentre la función

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

que calcula la distancia del punto (x, y, z) al plano $3x + 2y + 6z = 5$.

5. Determine si los siguientes límites existen, y en dado caso calcúlelo

i)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$$

ii)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

iii)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

iv)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

6. Determine si la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$.

7. Explique por qué el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + y^2} \cos(y)$$

no existe.

8. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1, 2, -3)$.

9. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la gráfica de

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

en $x = 1, y = 2$.

10. Encuentre la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de ecuación

$$xy = \ln(x + z)$$

en el punto $(0, 0, 1)$.

11. Encuentre la aproximación lineal de la función

$$f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{y}$$

en $(x, y) = (0, 1)$.

12. El capitán Ralph tiene dificultades cerca a Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x, y, z) estará dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2},$$

donde x, y y z están medidas en metros. Actualmente él está en $(1, 1, 1)$.

i) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?

ii) Si la nave viaja a e^8 m/s, ¿con qué velocidad decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?

iii) Desafortunadamente, el metal del casco se cuartera si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^{20}$ /s. Describir el conjunto de direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor a que esa.

13. Considere las funciones $f(x, y) = (e^{x+y}, x^2y)$ y $g(u, v) = (\ln u, v^2 - \sin u)$.

i) Escriba una fórmula para la función compuesta $f \circ g$.

ii) Calcule, usando la regla de la cadena, $D(f \circ g)(\pi, 0)$.

14. Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

i) $f(x, y) = x \sin y$

ii) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$.

15. Considere la función $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$.

i) Encuentre y clasifique los puntos críticos de f .

ii) Encuentre los extremos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.

16. Considere la función

$$f(x, y) = xy.$$

i) Determine para qué valor de t , la función f alcanza un valor maximal sobre la curva

$$r(t) = (\cos t, \sin t).$$

Es decir, encuentre en qué valores de t la función $g(t) = f(r(t))$ alcanza un máximo.

ii) Haga un dibujo de curvas de nivel de la función f y de la curva parametrizada por r .

iii) Describa la posición relativa del gradiente de f y del tangente a la curva r en el punto que corresponde al valor t encontrado en i). Verifique su conclusión en la gráfica hecha en ii).

17. Hallar el máximo y el mínimo $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ y la región del plano D definida por las desigualdades

$$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 5.$$

18. Hallar el máximo y el mínimo de

$$f(x, y) = xy - y + x - 1$$

en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$. (Ayuda: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$)

19. Hallar el máximo y el mínimo de

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 16$.

20. Encuentre los puntos más cercanos al origen sobre la superficie $S : y^2 = 9 + xz$.

21. Encuentre los máximos de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ bajo las restricciones $x + y + z = 1$ y $x - y + 2z = 2$.

22. Calcule la longitud de arco de la trayectoria

$$x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

23. Calcule la longitud de arco de la trayectoria

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = \ln(\cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$